Серия 34. Гауссовы числа-2

Целые гауссовы числа бывают:

- *обратимыми*: это числа $1, -1, i, -i$,
- *необратимыми*. Необратимые числа бывают:
  - нулём,
  - простыми числами, т.е. не представимыми в виде произведения двух необратимых,
  - составными числами.

Простые числа при этом делятся на четвёрки *ассоциированных*, т.е. получающихся друг из друга домножением на обратимые. Например, числа $2+i, -i+2, -2-i, 1-2i$ попарно ассоциированны друг с другом. NB: число $2-i$ с ними не ассоциировано.

Теорема. Каждое гауссово число представимо в виде произведения простых гауссовых чисел, и притом однозначно (с точностью до их перестановки и умножения на обратимые).

Замечание в скобках означает, что разложения $-5 = (-1)(2+i)(2-i)$ и $5 = (1+2i)(-1+2i)$ считаются одинаковыми. Этой теоремой в дальнейшем можно пользоваться без доказательства.

Следующие четыре задачи направлены на то, чтобы понять, какие гауссовы числа являются простыми.

287. Напомним, что *нормой* числа $z = a + bi$ называется число $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Пусть гауссово число z не является ни число мнимым, ни число вещественным (т.е. $ab \neq 0$).
а) Докажите, что если его норма – простое натуральное число, то z является простым гауссовым.
б) Докажите, что если z является простым гауссовым, то его норма – простое натуральное число.

288. Докажите, что если $p = 4k + 3$ – простое число, то оно является простым гауссовым числом.

289. Докажите, что если p – простое число вида $4k+1$, то существует такое натуральное n, что $n^2 + 1$ делится на p.

290. Докажите, что простое число p вида $4k+1$ не может быть простым гауссовым числом.

Отсюда вытекает известное утверждение, согласно которому любое простое число вида $4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов. Разумеется, пользоваться им без доказательства в предыдущих задачах нельзя.

291. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 5^{100}?$$

292. Докажите, что число $235^2 + 972^2$ является составным. Калькулятором можно воспользоваться лишь один рзз для того, чтобы найти значение этого числа.

293. Решите в целых числах: $x^2 + 1 = y^3$.

294. Решите в целых числах: $x^2 + 4 = y^3$.