Кружок в “Хамовниках”. 11 класс. 2015-2016 учебный год.

Серия 15. Теория чисел.

127. При каких натуральных n число $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ делится на 101?

128. Докажите, что при каждом натуральном n число $n^{n^{n^{n}}}-n^{n^{n}}$ делится на 547.

129. Докажите, что если для натурального $n>1$ число 3^n+4^n делится на n, то n делится на 7.

130. Натуральные a, b таковы, что число $2^{a+b^2}+3^{b^2+a^3}$ делится на $ab(2a!-1)$. Докажите, что число $3^{a+b^2}+2^{b^2+a^3}$ также делится на $ab(2a!-1)$.

131. Докажите, что сумма ряда

$$1+\frac{1}{2!}=\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots$$

является иррациональным числом.

132.* Обозначим p_k простое число с номером k (т.е. $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$). Докажите, что если n является удвоенным числом Фибоначчи, то число $(p_n+p_{n+1})/2$ составное.

133. Пусть $f(d)$ – наименьшее натуральное число, у которого ровно d натуральных делителей (например, $f(1)=1$, $f(5)=16$, $f(6)=12$). Докажите, что число $f(2^{n+1})$ всегда делится на $f(2^n)$.

134. На какую максимальную степень двойки делится число

$$1+3^3+5^5+7^7+\dots+1021^{1021}+1023^{1023}?$$

Кружок в “Хамовниках”. 11 класс. 2015-2016 учебный год.

Серия 15. Теория чисел.

127. При каких натуральных n число $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ делится на 101?

128. Докажите, что при каждом натуральном n число $n^{n^{n^{n}}}-n^{n^{n}}$ делится на 547.

129. Докажите, что если для натурального $n>1$ число 3^n+4^n делится на n, то n делится на 7.

130. Натуральные a, b таковы, что число $2^{a+b^2}+3^{b^2+a^3}$ делится на $ab(2a!-1)$. Докажите, что число $3^{a+b^2}+2^{b^2+a^3}$ также делится на $ab(2a!-1)$.

131. Докажите, что сумма ряда

$$1+\frac{1}{2!}=\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots$$

является иррациональным числом.

132.* Обозначим p_k простое число с номером k (т.е. $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$). Докажите, что если n является удвоенным числом Фибоначчи, то число $(p_n+p_{n+1})/2$ составное.

133. Пусть $f(d)$ – наименьшее натуральное число, у которого ровно d натуральных делителей (например, $f(1)=1$, $f(5)=16$, $f(6)=12$). Докажите, что число $f(2^{n+1})$ всегда делится на $f(2^n)$.

134. На какую максимальную степень двойки делится число

$$1+3^3+5^5+7^7+\dots+1021^{1021}+1023^{1023}?$$