Серия 14. Терема Ван дер Вардена.

116. Все клетки бесконечного листа клетчатой бумаги раскрасили в N цветов.
а) Докажите, что найдётся прямоугольник, вершины которого одного цвета, а стороны параллельны линиям сетки.
б) Докажите, что найдутся такие 100 строк и 100 столбцов, что 10000 клеток, стоящие на их пересечении, окрашены в один цвет.

117. а) Все натуральные числа покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия из чисел одного цвета.
б) Клетки бесконечного клетчатого листа покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдутся три одноцветные клетки, центры которых образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат и правым нижним прямым углом.

118. Клетки бесконечного клетчатого листа покрашены в несколько цветов. *Квадратом* размера k будем называть k^2 клеток, образующих квадрат. Будем называть два непересекающихся квадрата *близнецами*, если у них одинаковый размер, одинаковая раскраска и их верхние клетки лежат на одной горизонтали (в частности, близнецы размера 1 – просто одноцветные клетки, лежащие в одной горизонтали).
а) Пусть цветов 3, и нашлись два близнеца некоторого размера, внутри каждого из которых к нижней гринице примыкают по два близнеца некоторого размера, внутри каждого из которых к нижней границе примыкают по два близнеца размера 1. Докажите, что найдутся три одноцветные клетки, центры которых образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат и правым нижним прямым углом.
б) Пусть цветов N. Докажите, что найдутся три одноцветные клетки, центры которых образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат и правым нижним прямым углом.

119. Натуральные числа раскрашены в 100 цветов. Докажите, что есть одноцветная арифметическая прогрессия длины 3.

120. Клетки бесконечного клетчатого листа покрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать 4 одноцветные клетки с центрами, находящимися в вершинах квадрата со сторонами, параллельными осям координат.
(Подсказка: сначала найдите три *удачно расположенных* одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольника, все вершины которых одного цвета.)

121. а) Клетки бесконечного клетчатого листа покрашены в три цвета. Докажите, что можно выбрать 4 одноцветные клетки с центрами, находящимися в вершинах квадрата со сторонами, параллельными осям координат.
(Подсказка: возьмите конструкцию из задачи 120 и сделайте её иерархической, как в задаче 118.)
б) То же самое, но клетки покрашены в k цветов.

Обобщнная теорема Ван дер Вардена. Для любой клетчатой фигуры F и для любого натурального k существует такое N, что внутри любого квадрата $N \times N$, раскрашенного в k цветов, найдётся одноцветная фигура, гомотетичная фигуре F.

Доказательство можно вести двойной индукцией: по k и по размеру фигуры $|F|$.

122. Слабый индукционный переход обобщённой теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n+1$ и двух цветов.

123. Сильный индукционный переход обобщённой теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n+1$ и k цветов.

124. Клетки бесконечной плоскости заполнены целыми числами. Доказать, что есть квадрат с суммой чисел внутри, делящейся на 2016.

125. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что среди любых 1000 чисел подряд есть красное. Доказать, что есть арифметическая прогрессия длины 100 из красных чисел.

126. Докажите, что при любом n и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n, первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.