Серия 12. Три колпака.

Теорема о трёх центрах гомотетии. Композицией $H_B^l \circ H_A^k$ двух гомотетий H_A^k и H_B^l при $kl \neq 1$ служит некоторая гомотетия H_C^{kl} , причём точки A, B, C лежат на одной прямой или совпадают. При $kl = 1$, $H_B^l \circ H_A^k$ — есть параллельный перенос на вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$.

По-другому можно сформулировать так. Если композиция трёх гомотетий есть тождественное преобразование, то центры этих гомотетий лежат на одной прямой.

98. a) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.
b) Общие внутренние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, и внешние к окружностям S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

99. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD, причем длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых:
a) AB и CD, AP и DQ, BP и CQ;
b) AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

100. Семейство окружностей касается двух данных неравных окружностей внутренним образом в точках A, B соответственно. Докажите, что все прямые AB проходят через одну точку.

101. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в Q, PB и AD — в X, а BQ и AD — в Y . Докажите, что M — середина XY.

102. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C . Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

103. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон в точках A_1, B_1, C_1. Вписанная окружность треугольника ADC касается сторон в точках A_2, D_2, C_2. Оказалось, что $B_1 = D_2$. а) Докажите, что прямые BD, A_1A_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны. б) Докажите, что линия центров окружностей проходит через ту же точку или параллельна им всем.

104. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, тоже можно вписать окружность.

105. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB+AD = CB+CD$. В треугольники ABC, CDA вписаны окружности с центрами I_1, I_2. Докажите, что AC, BD, I_1I_2 пересекаются в одной точке.

Серия 12. Три колпака.

Теорема о трёх центрах гомотетии. Композицией $H_B^l \circ H_A^k$ двух гомотетий H_A^k и H_B^l при $kl \neq 1$ служит некоторая гомотетия H_C^{kl} , причём точки A, B, C лежат на одной прямой или совпадают. При $kl = 1$, $H_B^l \circ H_A^k$ — есть параллельный перенос на вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$.

По-другому можно сформулировать так. Если композиция трёх гомотетий есть тождественное преобразование, то центры этих гомотетий лежат на одной прямой.

98. a) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. b) Общие внутренние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, и внешние к окружностям S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

99. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD, причем длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых:
a) AB и CD, AP и DQ, BP и CQ;
b) AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

100. Семейство окружностей касается двух данных неравных окружностей внутренним образом в точках A, B соответственно. Докажите, что все прямые AB проходят через одну точку.

101. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в Q, PB и AD — в X, а BQ и AD — в Y . Докажите, что M — середина XY.

102. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C . Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

103. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон в точках A_1, B_1, C_1. Вписанная окружность треугольника ADC касается сторон в точках A_2, D_2, C_2. Оказалось, что $B_1 = D_2$. а) Докажите, что прямые BD, A_1A_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны. б) Докажите, что линия центров окружностей проходит через ту же точку или параллельна им всем.

104. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, тоже можно вписать окружность.

105. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB+AD = CB+CD$. В треугольники ABC, CDA вписаны окружности с центрами I_1, I_2. Докажите, что AC, BD, I_1I_2 пересекаются в одной точке.