Серия 11. Размерность векторного пространства.

Элементы векторного пространства размерности k – строчки из k чисел (координат). Эти элементы можно покоординатно складывать и умножать на число.

Основная лемма о линейной зависимости. Пусть в $k-$мерном пространстве даны $k+1$ вектор $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{k+1}}$. Тогда можно найти такие $k+1$ чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, не все из которых равны нулю, что

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} = 0.$$

(имеется в виду, что получится нулевой вектор, т.е. вектор, у которого все координаты – нули.)

Это утверждение верно также, если считать, что координаты и числа λ_i – остатки по модулю простого числа p.

89.$^\circ$ В классе 20 учеников, они ходили в 21 поход. Докажите, что можно выбрать несколько походов так, что каждый ученик ходил в чётное число из них.

90. Докажите, что n-мерном пространстве нельзя выбрать $n+1$ попарно перпендикулярных ненулевых векторов.

91. Изначально все клетки доски 8×8 черные. Сколько различных раскрасок можно получить, перекрашивая столбцы и строки?

92. Изначально во всех клетках доски 8×8 стоят нули. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 или 4×4 и прибавить одно и то же действительное число ко всем его клеткам. Любой ли набор чисел так можно получить?

93. Числа на главной диагонали таблицы размера 10×10 не меньше двадцати, а модули всех остальных не превосходят 1. Докажите, что строки таблицы являются линейно независимыми векторами.

94. В $n-$элементном множестве выбраны $n+1$ трёхэлементных подмножества. Докажите, что какие-то два из них пересекаются по одному элементу.

95. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.

96. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geq k$.

97. Есть $n-$элементное множество и набор из m различных его подмножеств такой, что
а) мощности всех подмножеств равны и мощности всех попарных пересечений равны.
б) мощности всех попарных пересечений равны (менее сильное условие).

Докажите, что $m \leq n$.