Серия 31. Векторы в многомерном пространстве.

Идет математик по улице. Вдруг увидел афишу - "Концерт камерного ансамбля". Очень заинтересовался, купил билет и пошел слушать. Через час выходит недовольный: – Совершенно тривиальный случай. "Ка" равно трем.

старый анекдот

Точки $k-$мерного пространства – это последовательности, состоящие из k действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, которые называются *координатами*. Расстояние между точками $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ определяется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_k - a_k)^2}.$$

243. Докажите, что в $k-$мерном пространстве выполняется *неравенство треугольника*, то есть для любых трёх точек A, B, C выполнено $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

Векторы тоже состоят из k координат, их, как и в двухмерном и трёхмерном пространствах, можно складывать друг с другом и умножать на числа (формулы придумайте сами), а также у двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ есть скалярное произведение $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, равное сумме произведений соответствующих координат. *Длиной* вектора $\overrightarrow{a}$ называется величина $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}$. Несложно понять, что для точек A и B выполнено $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$.

244.
а) (можно не сдавать) убедитесь, что для трёх векторов выполнено $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$.
б) Докажите, что $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \leqslant |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$. Догадайтесь, как называется это неравенство!

Векторы, скалярное произведение между которыми равно нулю, называются *перпендикулярными.*

245. *Основная лемма о линейной зависимости.* Пусть в $k-$мерном пространстве даны $k+1$ вектор $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{k+1}}$. Тогда можно найти такие $k+1$ чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, не все из которых равны нулю, что

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_{k+1} \overrightarrow{a_{k+1}} = 0.$$

(имеется в виду, что получится нулевой вектор, т.е. вектор, у которого все координаты – нули.)

246. В $k-$мерном пространстве дано $k-1$ векторов. Докажите, что найдётся ненулевой вектор, перпендикулярный им всем.

247. Какое максимально возможное число попарно перпендикулярных ненулевых векторов в $k-$мерном пространстве?

248. а)В $k-$мерном пространстве даны n точек $M_1, \ldots, M_n$. Докажите, что существует и единственна такая точка M, что сумма векторов из неё до всех M_i равна 0. (Эта точка называется их *центром масс*).
б) Докажите, что она обладает тем свойством, что $|MM_1|^2 + \cdots + |MM_n|^2$ минимально.

249. Даны k векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ длины 1 каждый. Докажите, что в выражении $\overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \cdots \pm \overrightarrow{a_k}$ можно так выбрать знаки, чтобы получился вектор длины не менее $\sqrt{k}$.

250. В $k-$мерном пространстве выбраны n точек, расстояния между которыми попарно равны 1. Докажите, что их центр масс от них равноудалён. На какое расстояние?

251. а)Докажите, что в k-мерном пространстве можно выбрать $k+1$ точку на равном ненулевом расстоянии друг от друга.
б) Докажите, что $k+2$ точек так выбрать нельзя.