Серия 29. После региона ничего нового. Инварианты и полуинварианты.

231. На плоскости дано $2n$ точек общего положения. Половину из них покрасили красным, а другую половину синим. Докажите, что можно разбить точки на разноцветные пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки из одной пары, не пересекались.

232. В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в первой строке (слева направо по порядку) $1, 2, \ldots 10$, во второй — $11, 12, \ldots 20, \ldots$, в десятой — 91, $92, \ldots 100$. Разрешается взять любой прямоугольник 1×3 и сделать следующую операцию: прибавить к крайним числам по 1, а из среднего отнять 2, или сделать обратную операцию. Через некоторое время оказалось, что в квадрате опять присутствуют все числа от 1 до 100. Докажите, что они расположены на первоначальных местах.

233. В вершинах квадрата стоят по циклу числа 1, 2, 3. 4. Разрешается поворачивать квадрат ну угол, кратный 90°, а также одновременно прибавлять (или одновременно вычитать) каждое из верхних чисел к каждому из нижних. Можно ли получить числа по циклу

а) 2, 1, 3, 4?

б) 1, 2, 3, 6?

234. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого – квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

235. За круглым столом сидят десять человек, перед каждым – несколько орехов. Всего орехов – сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину – если у него(у того, кто передаёт) было чётное число или один орех плюс половину остатка - если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.

236. Петя выписал на доске n действительных чисел. Затем Вася каждую минуту мысленно разбивает все числа на две группы так, чтобы модуль разности сумм в группах была наименьшей из возможных (группа может быть и пустой, тогда её сумма равна 0). После чего ко всем числам из одной группы добавляет 1, а из всех чисел другой группы вычитает 1. Докажите, что однажды на доске появится число, модуль котогрого не меньше $\frac{n}{2}$.

237. У чиновника на столе лежит 2016 папок с бумагами. В первый день он произвольным образом разложил их на несколько стопок. Каждый день чиновник, чтобы создать видимость деятельности, меняет разложение папок по стопкам: он берёт из каждой стопки по одной папке и формирует из них новую стопку. Докажите, что однажды набор размеров стопок перестанет меняться.

238. На полке стоит собрание сочинений Ленина в 55 томах, расставленных в произвольном порядке. Библиотекарь каждый ход берёт произвольный том, стоящий не на свойм месте, и перемещает его так, чтобы он стоял на своём месте (при этом другие книги могут сдвигаться, не меняя порядок друг относитльно друга). Докажите, что рано или поздно все книги окажутся одновременно на своих местах.