

Комбинаторная стереометрия

1. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противоположащего бокового ребра под прямым углом?
2. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра — хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим.
3. Назовем *кубоподобным* многогранник, имеющий шесть граней и восемь вершин, в каждой из которых сходятся по три грани, каждая грань при этом — четырехугольник. Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.
4. В выпуклом многоугольнике P_1 содержится выпуклый многоугольник P_2 . Докажите, что при любой гомотетии относительно точки $x \in P_2$ с коэффициентом $k = -1/2$ по крайней мере одна вершина P_2 не выйдет за пределы P_1 .
5. Найдите геометрическое место точек P , лежащих внутри куба $ABCD A' B' C' D'$, для которых в каждую из шести пирамид $PABCD, PABB' A', PBCC' B', PCDD' C', PDAA' D', PA' B' CD'$ можно вписать в сферу.
6. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $3\sqrt{2}/4$.
7. В пространстве расположены четыре попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что найдется полуплоскость, границей которой является одна из этих прямых, не пересекающаяся с остальными тремя прямыми.