Рациональное и иррациональное

1. Докажите, что число **(a)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ иррационально.

2. Докажите, что если число $(a+b\sqrt{2})$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число $(a-b\sqrt{2})$ является корнем того же многочлена.

3. Число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Найдите еще три числа, являющиеся корнями того же многочлена.

4. Докажите, что число $14+10\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде $(a+b\sqrt{2})^2$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

5. Существует ли α такое, что $\cos(\alpha)$ иррационально, а $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, $\cos(4\alpha)$ и $\cos(5\alpha)$ рациональны?

6. Число $\alpha = 0{,}12457\ldots$ определено следующим образом: n-я цифра после запятой равна первой цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

7. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

8. Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка?

9. Пусть α и β — иррациональные числа, причем $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Докажите, что последовательности $[n\alpha]$ и $[n\beta]$ покрывают весь натуральный ряд без перекрытий.