Подготовка к олимпиаде по геометрии

1. Докажите, что любой жесткий плоский треугольник T площади меньше четырех можно просунуть сквозь треугольную дырку Q площади 3.

2. Прямая a пересекает плоскость α. Известно, что в этой плоскости найдутся 2011 прямых, равноудаленных от a и не пересекающих a. Верно ли, что a перпендикулярна α?

3. $ABCDE$ – правильный пятиугольник. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AC. Можно ли пятиугольниками, равными $AB'CDE$, замостить плоскость?

4. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

5. На плоскости проведены шесть прямых. Известно, что для любых трех из них найдется четвертая из этого же набора прямая, такая что все четыре будут касаться одной окружности. Обязательно ли все шесть прямых касаются одной и той же окружности?

6. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Касательные к окружности в точках A и C и прямая, симметричная BD относительно точки O, пересекаются в одной точке. Докажите, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны.

8. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

9. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.