

Разной по геометрии

1. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B . Из точки P , лежащей на прямой b , опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.
2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .
3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB , пересекает вторично сторону BC в точке L . Докажите, что $CB + CL = AB$.
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF , пересекающиеся в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.
5. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B , чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.
6. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.