Малая теорема Ферма

1. Докажите, что для любого целого числа a число $a^{561} - a$ делится на 561.

2. Известно, что число $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.

3. Докажите, что если $x^2 + 1$ делится на нечетное простое p, то $p = 4k + 1$. При помощи этого докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = 4k + 1$.

4. Дано простое p и целое a, не делящееся на p. Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $a^k \equiv 1 \pmod p$. Докажите, что $(p-1)$ делится на k.

5. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

6. Пусть для простого числа $p > 2$ и целого a, не делящегося на p, выполнено сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$. Докажите, что $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.

7. Докажите, что если p — простое число, $p \neq 2, 5$, то длина периода разложения $1/p$ в десятичную дробь делит $(p-1)$.

8. Даны натуральные $x, y \in [2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ составное.