

Немного энтомологии

На окружности отмечено n точек. В одной из точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по часовой стрелке на b точек (через $(b - 1)$ точек на b -ю).

0. Докажите, что через некоторое количество прыжков кузнечик окажется в точке, в которой уже бывал.
1. Докажите, что первая точка, в которой кузнечик побывает дважды — это начало пути кузнечика.
2. В отмеченных точках растет травка. Сколько травки сможет съесть кузнечик? Каким должно быть число b , чтобы кузнечик съел всю травку на окружности?

Определение. Пусть есть два целых числа a и b и натуральное число n . Числа a и b называются *сравнимыми по модулю n* , если $(a - b)$ делится на n . Пишут

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Если b — число от 0 до $n - 1$, то говорят, что a имеет остаток b по модулю n .

3. Докажите утверждения: (пункты сдаются одновременно)
(a) $a \equiv a \pmod{n}$;
(b) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$;
(c) $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$;
(d) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$;
(e) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$;
(f) В каких случаях $ac \equiv bc \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$?
4. Для каких a и b у сравнения $ax \equiv b \pmod{n}$ найдется решение x ? Опишите все решения этого сравнения.
5. Найдите остаток от деления 3^{2015} на 14.
6. Докажите, что $1^{101} + 2^{101} + \dots + 2015^{101}$ делится на 1008.
7. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n .
8. Докажите, что для любого числа d , не делящегося на 2 и на 5, найдется число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы, и которое делится на d .
9. **Теорема Вильсона.** Докажите, что для простого p выполнено сравнение $(p-1)! \equiv (-1) \pmod{p}$.
10. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.