

Неравенства

Вспомним неравенства о средних.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

1. (Упражнение) Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geq 4\sqrt{2}.$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d, e выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

4. Докажите неравенства для положительных значений переменных:

(a) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

(b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

5. Докажите, что выполнено неравенство:

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12.$$

6. Пусть $a > 0$. Найдите минимальное значение выражения

(a) $a + 1/a$; (b) $a^3 + 1/a$;

(c) $a^{40} + 1/a^{16} + 2/a^4 + 4/a^2 + 8/a$.

7. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$2^{10}(a + b^2 + c^4)^7 \geq 7^7(abc)^4.$$

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac.$$

9. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$