

Для самостоятельного решения

1. На доске записано число 76. Каждую минуту число стирается с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час (то есть, чему равно 61-е число).
2. Найдите сотую цифру после запятой числа $4/135$.
3. Один преподаватель оставил на дверях всех кабинетов записки следующего содержания: «Я в комнате номер ...» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.
4. Докажите, что если в задаче про одного преподавателя все записки указывают на разные кабинеты, то школьник рано или поздно вернется в тот кабинет, с которого начал.
5. Каждое следующее число последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.
6. Докажите, что найдутся две различные степени 2, разность которых делится а) на 1000; б) на 2015.
7. Последовательность натуральных чисел строится так: первые два члена произвольны, а каждое следующее число равно последней цифре суммы квадратов предыдущих членов. Докажите, что эта последовательность всегда заиклиивается. Может ли она иметь предпериод?
8. Вот уже миллиард лет погода в Урюпинске в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует восемь типов погоды. Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь встретится неделя с точно такой же погодой.

Домашняя работа

9. В тридесятном королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут заиклиивается.
10. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию ещё несколько раз.