

1. Есть три кучки монет: по 2, по 5 и по 10 рублей. Разрешается выбрать 7 монет из одной кучки, 5 монет из другой и 2 – из третьей на выбор. Как набрать наибольшую, а как наименьшую сумму денег?
2. Пусть $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?
3. **Транснеравенство.** Даны два набора по n чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Эти числа разбиваются на n пар так, что в каждой паре одно число из первого набора, а другое – из второго: a_1 и b_{i_1} , a_2 и b_{i_2}, \dots , a_n и b_{i_n} . Затем числа в парах перемножают, и полученные произведения складывают: $V = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$.
Оказывается, что **наибольшее** значение V равно $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, а **наименьшее** равно $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$. Докажите это.

Для самостоятельного решения

4. На доске а) 2×2 ; б) $n \times n$ расставлены не бьющие друг друга ладьи и в каждой клетке вписано произведение ее координат. Какова может быть максимальная сумма чисел под ладьями?
5. Известно, что $a \geq b \geq c > 0$. Расположите следующие числа в порядке возрастания.
 - а) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$;
 - б) a^2, b^2, c^2 ;
 - в) $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$;
 - г) a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 ;
 - е) $\frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}$.
6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$, при $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. А что изменится, если $d \geq a \geq c \geq b \geq 0$.
7. Для положительных чисел x, y и z , таких что $x \geq y \geq z$ докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

8. Докажите, что $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$, при $a \geq b \geq c > 0$.

9. **Неравенство Чебышёва.** Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите, что

$$n(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n).$$

Домашняя работа

10. Докажите, что $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$, при $a, b, c \geq 0$.
11. Для положительных a, b и c докажите с помощью транснеравенства, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.