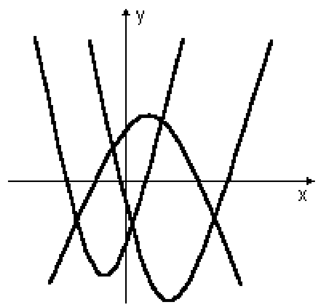
Лицей 1547, 9 класс	Парабола.	26 ноября 2015

Параболой называется фигура, являющаяся графиком квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

1. а) Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и данной точки, не лежащей на этой прямой, всегда является параболой. Эти прямая и точка называются *директрисой* и *фокусом* параболы соответственно.
   б) Пусть парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Найдите её директрису и фокус.

Для самостоятельного решения

2. а) Сколько общих точек могут иметь две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов в одной и той же системе координат?
   б) Через точку A параболы проведены всевозможные прямые. Сколько из них имеют с параболой только одну общую точку? (Рассмотрите различные положения точки A.)
3. Рассмотрим квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p - q = 2015$. Покажите, что все параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.
4. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трехчленов $x^2 + bx + c$ и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трехчлены иметь общий корень?
5. Графики трех функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причем $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ обоснуйте.
6. Лёша нарисовал на доске три параболы (см. рис.). Таня утверждает, что уравнения этих парабол $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$, $y = cx^2 + ax + b$ в каком-то порядке. Может ли это быть правдой при некоторых a, b и c?



7. Известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни.
8. Графики функций $y = x^2 - 2003$ и $y = 5x$ пересекаются в точках A и B. Найдите координаты середины отрезка AB.
9. Можно ли на плоскости разместить конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость?
10. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(x)) = 0$ иметь корни 1, 4, 9, 16?

Домашнее задание.

11. Замените в выражении $(x^3-2)^2+(x^2-*)^2$ звездочку ($*$) на одночлен (одночлен – выражение вида $ax + b$) так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.