Лицей 1547, 9 класс

Отображения.

13 ноября 2015

Определение. *Отображением* f из множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие единственный элемент $f(x)$ множества Y. При этом если $f(x) = y$, то элемент y называется *образом* элемента x при отображении f, а элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f. Обозначения: $f : X \to Y$ – *отображение*, X – *область определения*, а Y – *область значений*.

1. Сколько всего существует отображений из множества с m элементами в множество с n элементами?

2. Какие из следующих правил задают отображения? Каковы области определения и значений этих отображений?
   a) абсцисса точки с заданными координатами; b) сумма цифр числа;
   c) остаток от деления на k; d) целая часть, дробная часть.

   Определение. Пусть заданы отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Определим *композицию* $h = g \circ f$ формулой $h(a) = g(f(a))$.

3. Докажите, что
   a) $f \circ id = id \circ f = f$;
   b) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, где id – тождественное отображение (переводит каждый элемент в себя).

   Определение. Отображение $g : B \to A$ называется *обратным* к отображению $f : A \to B$, если $g \circ f = f \circ g = id$.

4. Найдите обратные к следующим отображениям:
   a) $y = 3x + 2$; b) $y = \dfrac{x+1}{x+2}$.

   Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным,* если для каждого $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.

   Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным,* если для каждого $y \in Y$ существует не более одного элемента $x \in X$ такого, что $y = f(x)$.

   Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным,* если оно сюръективно и инъективно.

5. Докажите, что если $f : X \to Y$ биективно, то для него существует обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$.

6. Верно ли, что
   a) если f и g биективны, то $g \circ f$ биективно; b) если $g \circ f$ биективно, то f и g биективны;
   c) если $g \circ f$ инъективно, то f инъективно; d) если $g \circ f$ сюръективно, то g сюръективно?

7. Установите биекцию между множествами натуральных и целых чисел.

8. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество четных делителей этого числа равно числу нечетных делителей этого числа.

9. Установите биективное соответствие между:
   a) точками отрезков длины 4 и длины 5;
   b) точками полуокружности без крайних точек и числовой прямой;
   c*) точками интервала и точками отрезка.

Домашнее задание.

10. Установите биекцию между клетками бесконечной (во все стороны) шахматной доски и натуральным рядом.

11. Докажите, что среди чисел, меньших 10 000, чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 21 поровну.