

Для самостоятельного решения

1. На доске записано число 76. Каждую минуту число стирается с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час (то есть, чему равно 61-е число).
2. Один преподаватель оставил на дверях всех кабинетов записки следующего содержания: «Я в комнате номер ...» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.
3. Докажите, что если в задаче про одного преподавателя все записки указывают на разные кабинеты, то школьник рано или поздно вернется в тот кабинет, с которого начал.
4. Каждое следующее число последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.
5. Найдите сотую цифру после запятой числа $4/135$.
6. Докажите, что найдутся две различные степени 2, разность которых делится а) на 1000; б) на 2015.
7. Последовательность натуральных чисел строится так: первые два члена произвольны, а каждое следующее число равно последней цифре суммы квадратов предыдущих членов. Докажите, что эта последовательность всегда зацикливается. Может ли она иметь предпериод?
8. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские политологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен «Актом о демократии», в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью опреелается партийностью предыдущи десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените какнибудь длину периода.
9. Вот уже миллиард лет погода в Калининграде в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует восемь типов погоды. Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь встретится неделя с точно такой же погодой.

Домашняя работа

10. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.
11. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию ещё несколько раз.