

Граф – это набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а отрезки – *рёбрами*. Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется *степенью этой вершины*. Вершина называется *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной*, если её степень нечётна.

Для самостоятельного решения

1. На День рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Покажите, как восьмерых ребят можно рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух, сидящих рядом, в именах встречались одинаковые буквы.
2. В графе с 20 вершинами любые две вершины соединены ребром. Сколько всего рёбер в этом графе?
3. В верхних углах доски 3×3 стоят чёрные кони, а в нижних - белые. Как поменять их местами и сколько ходов для этого необходимо?
4. Сытый марсианский кот Васька поймал 6 марсианских треххвостых мышек и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать? Васька поймал еще одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?
5. В графе с 8 вершинами и степени вершин равны 6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4. Сколько в нем ребер?
6. Докажите, что в любом графе:
 - a) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (и следовательно, четна);
 - b) число вершин нечетной степени четно.
7. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны
 - a) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1;
 - b) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;
 - c) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1;
 - d) 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2?
8. Докажите, что не существует 25-звенной ломаной, которая пересекает каждое свое звено ровно 3 раза.
9. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, у которых поровну знакомых в этой компании.
10. Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
11. На даче 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 непересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более, чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой.
12. В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что одним из этих видов транспорта можно добраться (на прямую или с пересадками) из любого города в любой другой.
13. Каждое из ребер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми - одного цвета.

Домашняя работа

14. В верхних углах доски 3×3 стоят чёрные кони, а в нижних - белые. Можно ли разместить коней одного цвета в противоположных клетках доски?
15. У каждого семиклассника есть ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разбить на две учебные группы так, чтобы в каждой группе не было ни друзей, ни врагов.