

Дорешивание по инвариантам.

1. Петя разорвал листок бумаги на 10 кусков, некоторые из этих кусков он снова разорвал на 10 кусков и так далее. Мог ли Петя получить таким образом 2009 кусочков бумаги?
2. На доске написано 11 чисел: 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполните такую операцию: зачеркните любые два числа и, если они были одинаковы, допишите к оставшимся числам один ноль, а если разные – единицу. Какое число получится в конце?
3. На доске выписаны числа $1, \dots, 10$. Разрешается выбрать любое нецелое число t и ко всем числам, меньшим t , прибавить 1, а из всех чисел, больших t , вычесть 1. Можно ли несколькими такими операциями получить только единицы и тройки? А единицы и четверки?

Разной из задач окружных олимпиад.

4. Решите уравнение $2(x + 1/x)^2 + (x^2 + 1/x^2)^2 - (x^2 + 1/x^2)(x + 1/x)^2 = (x + 2)^2$.
5. К Пете на день рождения пришло несколько гостей. На столе стояла большая ваза с конфетами. Один из гостей подошел к вазе, мысленно поделил конфеты на всех поровну (включая Петю), взял свою долю и ещё одну конфету. Второй гость, подойдя к вазе, также мысленно поделил оставшиеся конфеты на всех присутствующих, взял свою долю и ещё две конфеты. Аналогично поступил третий гость (взяв дополнительно три конфеты), и так далее. Последним к вазе подошёл Петя и обнаружил, что она пуста. Докажите, что все гости получили конфет поровну.
6. Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.
7. 16 футбольных команд из 16 стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех странах, кроме своей родины?
8. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бежит вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?
9. Прямоугольник разделён на квадраты со стороной 1 см. В каждом квадратике записано число (не обязательно целое) так, что сумма чисел в каждой строке равна 1, а в каждом столбце равна 2. Может ли площадь прямоугольника оказаться 2008 см²?
10. Саша начертил квадрат размером 6х6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма.