Геометрия. Подобия треугольников.

0.1. *Теорема Фалеса.* Дан угол с вершиной A и точки B, D на одной стороне угла, а точки C, E — на другой. Докажите: а) если BC параллельно DE, то AB/AC = AD/AE; б) если AB/AC = AD/AE, то BC параллельно DE.

0.2. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена а) внутренняя; б) внешняя биссектриса AL угла A. Докажите, что BL/CL = BA/CA.

0.3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что $AC^2 = AH \cdot AB$, $BC^2 = BH \cdot BA$, $CH^2 = AH \cdot BH$. Выведите отсюда теорему Пифагора.

0.4. *Теорема Вариньона.* Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. При каких условиях на диагонали исходного четырёхугольника получится ромб? А прямоугольник?

1. В трапеции ABCD основание AB в 2 раза меньше основания CD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что CE=CD.

2. На диагонали BD параллелограмма ABCD отмечена точка X. Прямая AX пересекает прямые BC, CD в точках P, Q. Докажите, что $AX^2 = XP \cdot XQ$.

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что AK=AP. Найдите отношение BK:PM.

4. В треугольнике ABC угол B равен 120^o, AB = 2BC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает AC в точке D. Найдите отношение AD : DC.

5. *Теорема Менелая.* (а) Прямая пересекает стороны BC, AC и продолжение стороны AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Тогда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

(б) Если на сторонах BC, AC и продолжении стороны AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что выполняется равенство из пункта (а), то эти точки лежат на одной прямой.

6. *Теорема Чевы.* (а) Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Через неё и вершины треугольника прово-дятся прямые, пересекающие стороны BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Тогда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

(б) Если на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что выполняется равенство из пункта (а), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

(в) Докажите с помощью теоремы Чевы теоремы о том, что медианы пересекаются в одной точке, то же про биссектриссы и высоты.