

Графы.

1. В стране 100 городов, между которыми проложены дороги с двухсторонним движением. Известно, что из каждого города можно доехать до каждого, причём ровно одним маршрутом. Найдите число дорог в стране.
2. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?
3. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
5. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2015 авиалиний, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (быть может, с пересадками) .
6. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?
7. В пионерском лагере каждая девочка знакома с 10 мальчиками, а каждый мальчик с 10 девочками. Докажите, что число девочек равно числу мальчиков.
8. Докажите, что в компании из 6 человек найдутся либо трое людей, попарно знакомых между собой, либо трое людей попарно незнакомых.
9. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.
10. В стране есть несколько городов, соединённых дорогами, из любого города можно доехать до любого другого. Путешественник хочет объехать всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Докажите, что он может это сделать тогда и только тогда, когда в стране не более чем из двух городов выходит нечётное число дорог. В каком случае он также может, выехав в начале путешествия из одного города, гарантировано вернуться в него же в конце?