

Инварианты.

1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

2. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 20$. За ход стираются два числа a и b и вместо них пишется число $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 ходов?

4. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

5. На табло горит число 1001. Каждую секунду какие-то две соседние цифры одновременно либо увеличиваются на 1, либо уменьшаются на 1 (если могут). Может ли на табло загореться число 2015?

6. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

7. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по одному веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают один по часовой стрелке, а другой — против, каждый — на соседнее дерево. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

8. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

9. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b , и написать вместо них число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

10. Бумажный треугольник с углами $20^\circ, 20^\circ, 140^\circ$ разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?