

Индукция.

— Задачи с прошлого раза.

1. Докажите тождества:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(n + 6)/6$.

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

2. (a) $10^n + 18n - 1 : 27$.

(b) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$.

— Новые задачи.

3. Докажите тождество $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

4. Докажите:

(a) $n^3 + 5n : 6$.

(b) $2^{3^n} + 1 : 3^{n+1}$.

5. Докажите, что число, записываемое с помощью 3^n единиц делится на 3^n .

6. Число x таково, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что тогда для любого натурального n число $x^n + 1/x^n$ — целое.

7. Докажите, что для любого натурального n и $x > -1$ верно $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

— Индукция в геометрии и комбинаторике.

8. Докажите, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

9. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из трёх клеток.

10. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

Индукция.

1. Докажите тождества:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(n + 6)/6$.

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

2. (a) $10^n + 18n - 1 : 27$.

(b) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$.

— Новые задачи.

3. Докажите тождество $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

4. Докажите:

(a) $n^3 + 5n : 6$.

(b) $2^{3^n} + 1 : 3^{n+1}$.

5. Докажите, что число, записываемое с помощью 3^n единиц делится на 3^n .

6. Число x таково, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что тогда для любого натурального n число $x^n + 1/x^n$ — целое.

7. Докажите, что для любого натурального n и $x > -1$ верно $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

— Индукция в геометрии и комбинаторике.

8. Докажите, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

9. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из трёх клеток.

10. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?