

## Метод крайнего.

1. Дано 2007 чисел. Сумма любых 5 из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
2. На шахматной доске расставлены ладьи. Докажите, что некоторая ладья бьёт не более двух.
3. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.
4. На листке написано несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число кратное им обоим. Докажите, что на листке есть число кратное всем.
5. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что
  - а) найдутся два астронома, наблюдающих планеты друг друга;
  - б) если число планет нечётно, то какую-то планету никто не наблюдает.
6. Можно ли расположить на плоскости некоторое конечное число точек так, чтобы любая точка находилась между двумя другими?
7. Дана таблица  $n \times n$ , в каждой клетке записано число, причём все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.
8. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.
9. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.
10. Рассматривается конечное множество  $M$  единичных квадратов на плоскости. Их стороны параллельны осям координат (разрешается, чтобы квадраты пересекались). Известно, что для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2. Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из множества  $M$ ) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по точке с каждым квадратом множества  $M$ .