

Чётность.

1. Докажите, что если сумма двух целых чисел нечётна, то их произведение чётно.
2. Можно ли 25 рублей разменять десятью монетами по 1, 3 и 5 рублей?
3. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.
4. Может ли прямая пересекать все звенья 11-звенной ломаной и при этом не проходить через её вершину?
5. В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?
6. Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n ?
7. Даны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?
8. На доске написаны числа 1, 2, . . . , 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.
9. В стране несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Может ли в стране быть ровно 3 города, из которых выходит 9 дорог, а из всех остальных по 10?

Домашние задачи.

10. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.
11. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли между ними расставить знаки $+$ и $-$ так, чтобы в итоге получить 0?
12. На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?