# Теория чисел.

**1.** При каких условиях на параметры $a, b$ и $c$, уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах? Как найти все решения этого уравнения? Решите в целых числах уравнения:

а) $45x - 37y = 25$.

б) $34x - 21y = 1$.

**2.** Почти везде $p$ — простое число, $a$ — ненулевой остаток при делении на простое число $p$.

а) Если $ax \equiv ay (mod\, p)$, то $x \equiv y (mod\, p)$. Приведите пример, когда это не так, если $p$ — составное.

б) Покажите, что числа $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$ являются разными остатками при делении на $p$.

в) Существует единственный остаток $b$ такой, что $ab \equiv 1(mod\ p)$.

г) Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$ тогда и только тогда, когда $p$ — простое.

д) Докажите малую теорему Ферма: для любого числа $a^p \equiv a(mod\ p)$.

**3.** Функцией Эйлера $\phi(n)$, где $n$ — натуральное число обозначается количество натуральных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с ним.

а) Докажите, что если $a$ и $b$ взаимно просты, то $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Научитесь вычислять $\phi(n)$ сначала когда $n$ является степенью простого числа, а затем для любого $n$ (через разложение на простые).

в) Докажите аналоги пунктов (а)-(в) в задаче 2, когда $p$ уже не простое, но $a$ — остаток, взаимно простый с $p$. Докажите теорему Эйлера: $a^{\phi(n)} \equiv 1(mod\ n)$, если $a$ взаимно просто с $n$.

**4.** Найдите остаток от деления $8^{800}$ на 29.

**5.** Пусть $p$ — простое. Докажите, что $(2p-1)! \equiv p(mod\ p^2)$.

**6.** Пусть $p > 5$ — простое. Докажите, что число из $p-1$ единицы делится на $p$.

**7.** Натуральные числа $a, b, c$ таковы, что $a^{128} + b^{128} + c^{128}$ делится на 257. Докажите, что число $abc$ делится на 257.

**8.** Докажите, что число $x^2 + x + 1$ не делится на 101 ни при каком натуральном $x$.

**9.** Пусть числа $m_1, ..., m_n$ попарно взаимно просты, $a_1, ..., a_n$ — произвольные целые числа. Найдите все такие целые $x$, что $x \equiv a_1(mod\ m_1), ..., x \equiv a_n(mod\ m_n)$.

**10.** а) Докажите, что существует 1000000 последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на десятую степень некоторого натурального числа.

б) Докажите, что существует 1000000 последовательных натуральных чисел, никакое из которых не является точной степенью натурального числа.