Метод математической индукции.

1. Докажите, что

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

в) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

2. Докажите, что для любого n

а) $10^n + 18n - 1 \vdots 27$.

б) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$.

в) $2^{3^n} + 1 \vdots 3^n$.

3. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей, начиная с восьми.

4. Докажите, что число состоящее из 243 единиц, делится на 243.

5. Из квадрата 128 x 128 вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трёх клеток.

6. Докажите, что для любого n,

$$1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/n^2 < 2.$$

7. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

8. Докажите, что если число $x + 1/x$ целое, то и число $x^n + 1/x^n$ — целое.

9. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

10. Назовём лестницей высоты n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?