Геометрия.

1. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что (а) четырехугольники AB_1HC_1 и AB_1A_1B вписанные; (б) $\angle BB_1A_1 = \angle BAH = \angle HB_1C_1$, т.е. BB_1 — биссектрисса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающиеся первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что AC $\parallel$ BD.

3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E. AD – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что AE = DE.

4. Две окружности касаются внешним образом в точке H. AC — общая внешняя касательная к этим окружностям (не проходящая через точку H; A и C — точки касания). Докажите, что угол AHC — прямой.

5. Две окружности касаются внешним образом в точке H. A — точка касания их общей внешней касательной с одной из окружностей; B — точка той же окружности, диаметрально противоположная точке A. Докажите, что длина касательной, проведённой из точки B до второй окружности равна диаметру первой окружности.

6. Точки X и O лежат на прямой a, лучи XK и XN образуют с ней равные углы, а точка O равноудалена от точек K и N. Тогда точки K, N, X и O лежат на одной окружности.

7. Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплос-кости относительно AB, а $\angle KXA = \angle NXB = 60^o$. Найдите длину отрезка KN.

8. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку Q проведена прямая, вторично пересекающая окружности в точках A и B соответственно. Тогда треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.

9. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность w в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность w в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.

10. а) Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AA_1. Докажите, что $\angle BAA_1 = \angle OAC$.

б) Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) H треугольника ABC, отраженный относительно стороны BC, попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC. в) Докажите, что ортоцентр H, отраженный относительно середины BC, попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC, причем диаметрально противоположную A.