

## Алгебра и теория чисел на окружных олимпиадах.

1. Найдите все такие функции  $f(x)$ , что  $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 1$ .
2. Найдите все такие натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.
3. Функция  $f(x)$  такова, что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполняется равенство  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . Найдите  $f(2007)$ , если  $f(1/2007) = 1$ .
4. Непрерывная функция  $f(x)$  такова, что для всех действительных  $x$  выполняется неравенство  $f(x^2) - (f(x))^2 \geq 1/4$ . Верно ли, что функция  $f(x)$  обязательно имеет точки экстремума.
5. Последовательность чисел строится следующим образом: первое число в ней равно 2, а каждое следующее равно сумме кубов цифр предыдущего числа. Верно ли, что два числа из этой последовательности совпадут?
6. Известно, что  $A$  — наибольшее из чисел, являющееся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 2011. На какую наибольшую степень тройки делится число  $A$ ?
7. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены слева направо в порядке убывания. Может ли это число быть кратным 111?
8. Докажите, что для всех  $x$  верно  $x^2 + x \sin x + x^2 \cos x + 0,5 > 0$ .
9. Докажите, что если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы остроугольного треугольника, то верно  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 2$ .
10. Решите уравнение  $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4) \sin x = 0$ .