Ортотреугольник.

1. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что (а) четырехугольники AB_1HC_1 и AB_1A_1B вписанные; (б) $\angle BB_1A_1 = \angle BAH = \angle HB_1C_1$, т.е. BB_1 — биссектрисса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1.

3. а) Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AA_1. Докажите, что $\angle BAA_1 = \angle OAC$.

б) Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) H треугольника ABC, отраженный относительно стороны BC, попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC.

4. Докажите, что ортоцентр H, отраженный относительно середины BC, попадает в точку на описанной окружности треугольника ABC, причем диаметрально противоположную A.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

6. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания высот, A_2 и B_2 — перпендикуляры, опущенные из точки C на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что прямая A_2B_2 делит отрезки A_1C_1 и B_1C_1 пополам.

7. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.