

## Перестановочное неравенство.

1. *Перестановочное неравенство.* Пусть  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  и  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  — произвольные наборы вещественных чисел;  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольная перестановка чисел  $b_1, \dots, b_n$ . Тогда

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Докажите всё, что ниже с помощью перестановочного неравенства (числа везде предполагаются положительными):

2.  $a^n + b^n + c^n \geq ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1}$

3.  $bc/a + ac/b + ab/c \geq a + b + c$

4.  $a^2/b^2 + b^2/c^2 + c^2/a^2 \geq b/a + c/b + a/c$

5. Найдите минимум выражения  $\sin^3 x / \cos x + \cos^3 x / \sin x$  при  $0 < x < \pi/2$ .

6.  $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

7.  $a + b + c = 1$ , тогда  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1/3$ .

8.  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Тогда  $a/(b+c-a) + b/(c+a-b) + c/(a+b-c) \geq 3$ .

9. (а)  $a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a+b) \geq 3/2$ ;

(б)  $a^n/(b+c) + b^n/(a+c) + c^n/(a+b) \geq (b^{n-1} + c^{n-1} + a^{n-1})/2$

10.  $a^2/(a+b)(a+c) + b^2/(b+c)(b+a) + c^2/(c+a)(c+b) \geq 3/4$ .

11. Докажите с помощью перестановочного неравенства неравенство Коши-Буняковского:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

12. Докажите с помощью перестановочного неравенства неравенства о средних:

$$\frac{n}{1/x_1 + \dots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$