

Графы.

1. В стране 100 городов, между которыми проложены дороги с двухсторонним движением. Известно, что из каждого города можно доехать до каждого, причём ровно одним маршрутом. Найдите число дорог в стране.
2. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?
3. В течение 92 дней авиакомпания выполняла по 10 рейсов в день. За день каждый самолёт летал не более одного раза. Известно, что для каждой пары дней найдётся один и только один самолёт, который летал в оба этих дня. Докажите, что какой-то самолёт летал каждый день.
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
5. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2015 авиалиний, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (быть может, с пересадками) .
6. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.
7. 16 футбольных команд из 16 разных стран играют турнир, каждая команда играет с каждой по одному разу. Одна команда не может играть два раза в одной и той же стране. Может ли турнир быть устроен так, что каждая команда ни разу не сыграла в своей стране?
8. Докажите, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомые друг с другом и не имеющих общих знакомых.
9. В стране есть несколько городов, соединённых дорогами, из любого города можно доехать до любого другого. Путешественник хочет объехать всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Докажите, что он может это сделать тогда и только тогда, когда в стране не более чем из двух городов выходит нечётное число дорог. В каком случае он также может, выехав в начале путешествия из одного города, гарантировано вернуться в него же в конце?
10. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?