

Интерполяция.

Сколько нужно точек, чтобы по значениям в них однозначно задать многочлен степени n ?

1. Если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то что можно сказать про них?

(а) Докажите, что если a, b, c, d различны, то для любого x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 1.$$

(б) Найдите все x такие, что

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x.$$

2. (а) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_0 принимает значение 1, а во всех остальных x_i равен 0.

(б) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n и число y . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_0 принимает значение y , а во всех остальных x_i равен 0.

(в) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n и y_0, y_1, \dots, y_n . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_i принимает значение y_i при всех i от 0 до n .

3. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1 . Докажите, что не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1 Q_2$.

4. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \dots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

5. Многочлен $Q(x)$ степени n принимает целые значения при $x = 0, 1, 4, \dots, n^2$. Докажите, что многочлен $Q(x)$ принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n , для которого $P(i) = 2^i$ при i от 0 до n . Найдите $P(n+1)$.

Интерполяция.

Сколько нужно точек, чтобы по значениям в них однозначно задать многочлен степени n ?

1. Если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то что можно сказать про них?

(а) Докажите, что если a, b, c, d различны, то для любого x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 1.$$

(б) Найдите все x такие, что

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x.$$

2. (а) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_0 принимает значение 1, а во всех остальных x_i равен 0.

(б) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n и число y . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_0 принимает значение y , а во всех остальных x_i равен 0.

(в) Даны вещественные числа x_0, x_1, \dots, x_n и y_0, y_1, \dots, y_n . Постройте многочлен степени не выше n , который в точке x_i принимает значение y_i при всех i от 0 до n .

3. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1 . Докажите, что не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1 Q_2$.

4. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \dots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

5. Многочлен $Q(x)$ степени n принимает целые значения при $x = 0, 1, 4, \dots, n^2$. Докажите, что многочлен $Q(x)$ принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n , для которого $P(i) = 2^i$ при i от 0 до n . Найдите $P(n+1)$.