Сравнения по модулю — 2.

1. Докажите, что число $2006 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 - 24$ делится (а) на 2005; (б) на 2010.

2. Докажите, что $2013! + \frac{4026!}{2013!}$ делится на 4027.

3. Существует ли натуральное n, такое что $n^2 + n + 1$ делится на 2015?

4. Докажите, что число $(3^n - 1)^n - 4$ делится на $3^n - 4$ при любом натуральном n.

5. Докажите, что число $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

6. Почти везде p — простое число, a — ненулевой остаток при делении на простое число p.
а) Если $ax \equiv ay(mod\, p)$, то $x \equiv y(mod\, p)$. Приведите пример, когда это не так, если p — составное.
б) Покажите, что числа $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$ являются разными остатками при делении на p.
в) Существует единственный остаток b такой, что $ab \equiv 1(mod\ p)$.
г) Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$ тогда и только тогда, когда p — простое.
д) Докажите малую теорему Ферма: для любого числа $a^p \equiv a(mod\ p)$.

Сравнения по модулю — 2.

1. Докажите, что число $2006 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 - 24$ делится (а) на 2005; (б) на 2010.

2. Докажите, что $2013! + \frac{4026!}{2013!}$ делится на 4027.

3. Существует ли натуральное n, такое что $n^2 + n + 1$ делится на 2015?

4. Докажите, что число $(3^n - 1)^n - 4$ делится на $3^n - 4$ при любом натуральном n.

5. Докажите, что число $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

6. Почти везде p — простое число, a — ненулевой остаток при делении на простое число p.
а) Если $ax \equiv ay (mod\, p)$, то $x \equiv y (mod\, p)$. Приведите пример, когда это не так, если p — составное.
б) Покажите, что числа $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$ являются разными остатками при делении на p.
в) Существует единственный остаток b такой, что $ab \equiv 1 (mod\, p)$.
г) Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! \equiv -1 (mod\, p)$ тогда и только тогда, когда p — простое.
д) Докажите малую теорему Ферма: для любого числа $a^p \equiv a (mod\, p)$.