

## Занятие 11. 20.04.16 Функция Эйлера.

Функцией Эйлера  $\varphi(n)$  числа  $n$  называется количество чисел от 1 до  $n$  взаимно простых с  $n$ .

**Пример.** 1)  $\varphi(6) = 2$ , так как подходят 1 и 5. 2)  $\varphi(8) = 4$ , так как подходят 1, 3, 5, 7.

**Теорема Эйлера.** Если числа  $a$  и  $n$  взаимно просты, то  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

### 1. Для САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

В первых двух задачах выведем формулу для  $\varphi(n)$ .

**Задача 1.1.** Числа  $p$  и  $q$  в пунктах б), d) и е) — простые. Вычислите

а)  $\varphi(15)$ ; б)  $\varphi(p)$ ; в)  $\varphi(2^{2016})$ ; d)  $\varphi(p^n)$ ; е)  $\varphi(pq)$ .

**Задача 1.2.** а) Докажите, что количество чисел взаимно простых с  $n$ , лежащих в промежутке от  $n + 1$  до  $2n$ , равно  $\varphi(n)$ .

б) Пусть числа  $a$  и  $b$  взаимно просты. Рассмотрим табличку:

1	2	...	$b$
$b + 1$	$b + 2$	...	$2b$
.....			
$(a - 1)b + 1$	$(a - 1)b + 2$	...	$ab$

Помедитировав над ней, докажите, что  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .

с) Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — все простые делители числа  $n$ . Докажите, что

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

**Задача 1.3.** Найдите остаток от деления  $5^{1514}$  на а) 49; б) 666.

**Задача 1.4.** Существует ли степень тройки, оканчивающаяся на 0001?

**Задача 1.5.** Пусть число  $n$  нечетно. Докажите, что  $2^{n!} - 1$  делится на  $n$ .

**Задача 1.6.** Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем  $n$ .

**Задача 1.7.** Докажите, что  $\sum_d \varphi(d) = n$ , где сумма берется по всем делителям числа  $n$ .

### 2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.

**Задача 2.1.** Найдите остаток от деления  $3^{1321}$  на а) 121; б) 175.

**Задача 2.2.** Пусть  $m$  и  $n$  не взаимно просты. Что больше  $\varphi(nm)$  или  $\varphi(n)\varphi(m)$ ?

**Задача 2.3.** Для каких  $n$  возможны равенства а)  $\varphi(n) = n - 1$ ; б)  $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$ ; в)  $\varphi(n) = n/2$ ?