Занятие 10. 13.04.16 Малая теорема Ферма.

Формулировка 1. Для простого p и натурального a, не кратного p, выполнено $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.
Формулировка 2. Для простого p и натурального a выполнено $a^p \equiv a(\mathrm{mop}\ p))$.

1. Найдите остатки от деления на 103 чисел $5^{102}, 3^{104}$.
2. Если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 561)$.

1. Для самостоятельного решения.

Задача 1.1. Найдите остаток от деления а) 2^{100} на 101; б) 7^{102} на 101.

Задача 1.2. Докажите, что $16^{2n+1} + (2n+1)^{16}$ делится на 17, если $(2n+1)$ на 17 не делится.

Задача 1.3. Докажите, что $50^{300} - 1$ делится на 1001.

Задача 1.4. а) Найдите остаток от деления 30^{239} на 31. б) Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ является составным.

Задача 1.5. Докажите, что $(a^{101} - a)$ делится на 606.

Задача 1.6. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$. Какой формулировкой теоремы Ферма удобнее воспользоваться в этой задаче?

Задача 1.7. Найдите все такие простые числа p, что $5^p + 1$ кратно p.

Задача 1.8. Пусть p — простое число, большее 5. Докажите, что $11111\ldots11$ ($p-1$ единица) делится на p.

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

Задача 2.2. Докажите, что $17^{120} - 1$ делится на 143.

Задача 2.3. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q(\mathrm{mod}\ pq)$.

Задача 2.4. Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?