Занятие 9. 23.03.16 Сравнения.

Определение. Будем говорить что натуральные числа a и b сравнимы по модулю m и писать $a \equiv b \pmod{m}$, если $(a-b)$ делится на m. Сама запись $a \equiv b \pmod{m}$ называется сравнением.

Справедливы следующие свойства сравнений:

(1) $a \equiv a \pmod{m}$;
(2) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$;
(3) если $a \equiv b \pmod{m}$и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$;
(4) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
(5) если $a \equiv b \pmod{m}$ то $ac \equiv bc \pmod{m}$;
(6) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$;
(7) если $a \equiv b \pmod{m}$ то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;
(8) если $ka \equiv kb \pmod{m}$ и НОД$(k, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Доказать, что а) $7^{2016} \equiv 1 \pmod{6}$; б) $5^{23} + 1 \equiv 0 \pmod{6}$; в) $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{5}$.

2. Доказать признак делимости на 9, 11.

1. Для самостоятельного решения.

Задача 1.1. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$.

Задача 1.2. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Задача 1.3. Докажите, что $36^{36} + 41^{41}$ делится на 77.

Задача 1.4. Найти остаток от деления 2^{2016} на 3, 11.

Задача 1.5. Найдите остаток от деления 3^{1514} на 7.

Задача 1.6. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{6n} - 2^{6n}$ делится на 35.

Задача 1.7. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

Задача 1.8. Известно, что $b = 2016^{2016} + 2$. Будут ли числа $b^3 + 1$ и $b^2 + 2$ взаимно простыми?

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{211}$.

Задача 2.2. Найдите остаток от деления $3^{100} + 4^{100}$ (1) на 7; (2) на 13.

Задача 2.3. Найти остаток от деления 2^{2016} на 5, 13.

Задача 2.4. Докажите, что $2^{41} + 1$ делится на 83.