Занятие 7. 09.03.16 Диофантовы уравнения. Теория.

1. Решение уравнения с 0 в правой части.

Хотим найти все целочисленные решения уравнения $ax + by = 0$, где a, b — целые числа, оба не равные нулю.

Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = a_1 \cdot d,\ b = b_1 \cdot d$ и числа a_1 и b_1 взаимно просты. Подставим выражения для a и b в уравнение:

$a_1dx + b_1dy = 0$. Делим обе части на $d \neq 0$. У полученного уравнения уже взаимно простые коэффициенты. Более того, новое уравнение и старое имеют одинаковый набор решений!

$a_1x + b_1y = 0$. Переносим b_1y в правую часть.

$a_1x = -b_1y$. Правая часть $-b_1y$ делится на a_1, но a_1 и b_1 взаимно просты, поэтому y делится на a_1. По определению делимости, найдется такое целое t, что $y = a_1t$. Подставляем это выражение для y в уравнение.

$a_1x = -b_1a_1t$. Сокращаем на $a_1 \neq 0$.

$x = -b_1t$. Окончательно, все решения нашего исходного уравнения $ax + by = 0$ имеют вид $(x, y) = (-b_1t, a_1t)$. Здесь t — любое целое число.

Пример. Решить уравнение $2016x + 1514y = 0$

$2016x + 1514y = 0$. НОД(2016,1514)=2.

$2 \cdot 1008x + 2 \cdot 757y = 0$. Сокращаем на 2.

$1008x + 757y = 0$. Переносим одно из слагаемых в правую часть

$1008x = -757y$. Числа 1008 и 757 взаимно просты, поэтому $y = 1008t$ для некоторого целого t. Подставим это y.

$1008x = -1008 \cdot 757t$. Сокращаем на 1008. Получаем ответ: $(x, y) = (-757t, 1008t)$ для произвольного целого числа t.

Задача 1. Решить уравнения 1) $x - y = 0$; 2) $5x - 3y = 0$; 3) $15x + 9y = 0$.

2. Находим линейное представление НОД.

Ранее была сформулирована следующая

Теорема. *Пусть a и b — целые числа, $d = НОД(a, b)$. Тогда существуют такие целые числа u, v, что $au + bv = d$.*

Как найти эти целые числа u и v, если нам даны конкретные значения чисел a и b? Вспомним алгоритм Евклида. На каждом шагу алгоритма запишем еще и выражение для остатка на этом шаге.

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 & \qquad r_1 &= a - bq_1 \\
b &= r_1q_2 + r_2 & \qquad r_2 &= b - r_1q_2 \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3 & \qquad r_3 &= r_1 - r_2q_3 \\
&\dots & \qquad &\dots \\
r_{n-4} &= r_{n-3}q_{n-2} + r_{n-2} & \qquad r_{n-2} &= r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2} \\
r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} & \qquad r_{n-1} &= r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1} \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + d & \qquad d &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n \\
r_{n-1} &= dq_n & &
\end{aligned}
$$

Осталось выразить $d = \text{НОД}(a, b)$ через числа a и b. Для этого рассмотрим правую колонку равенств. Нужно подставить в последнюю строку

$$d = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$$

выражение для r_{n-1} из предпоследней строки и привести подобные слагаемые:

$$d = r_{n-2} - r_{n-1}q_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1})q_n = r_{n-2}(1 + q_{n-1}q_n) - r_{n-3}q_n.$$

Получаем выражение d через r_{n-2} и r_{n-3}. Далее в это выражение нужно подставить r_{n-2} из третьей снизу строки и привести подобные слагаемые.

$$\begin{aligned} d = r_{n-2}(1 + q_{n-1}q_n) - r_{n-3}q_n &= (r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2})(1 + q_{n-1}q_n) - r_{n-3}q_n \\ &= r_{n-4}(1 + q_{n-1}q_n) - r_{n-3}(q_{n-2} + q_{n-2}q_{n-1}q_n + q_n). \end{aligned}$$

Получаем выражение d через r_{n-3} и r_{n-4}. Продолжая подставлять выражения для остатков, мы поднимаемся по строкам правой колонки и в конце концов получаем выражение d через a и b.

Пример. Найти линейное разложение НОД(2016,1514).

$$\begin{aligned} 2016 &= 1514 \cdot 1 + 502 & \qquad 502 &= 2016 - 1514 \cdot 1 \\ 1514 &= 502 \cdot 3 + 8 & 8 &= 1514 - 502 \cdot 3 \\ 502 &= 8 \cdot 62 + 6 & 6 &= 502 - 8 \cdot 62 \\ 8 &= 6 \cdot 1 + 2 & 2 &= 8 - 6 \cdot 1 \\ 6 &= 2 \cdot 3 & & \end{aligned}$$

Последовательно подставляя выражения для остатков и приводя подобные слагаемые, получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 2 = 8 - 6 = 8 - (502 - 8 \cdot 62) = 8 \cdot 63 - 502 = (1514 - 502 \cdot 3) \cdot 63 - 502 = \\ = 1514 \cdot 63 - 502 \cdot 190 = 1514 \cdot 63 - (2016 - 1514) \cdot 190 = 2016 \cdot (-190) + 1514 \cdot 253 \end{aligned}$$

Таким образом, числа u и v из теоремы найдены: $u = -190$, $v = 253$.

Задача 2. Найти линейное представление 1) НОД$(7, 5)$; 2) НОД$(97, 20)$.

3. Поиск одного решения уравнения $ax + by = c$.

Пусть у нас есть уравнение $ax + by = c$. Как найти решение этого уравнения? В одном из прошлых листиков была доказана следующая

Теорема. *Пусть a, b — целые числа, $d =$ НОД(a, b). Уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда c делится на d.*

Мы уже нашли d, поэтому проверим, делится ли c на d. Если c не делится на d, то решений у уравнения нет. Если делится, то можно записать c как $c = c_1 d$, где $c_1 \neq 0$ — целое число.

В поиске решения нам поможет линейное представление НОД(a, b) из предыдущего пункта. Мы научились находить такие целые числаu, v, что

$$au + bv = d.$$

Умножим обе части этого равенства на c_1.

$$auc_1 + bvc_1 = dc_1.$$

Заметим, что справа получилось число c, а числа uc_1 и vc_1 — целые. Наше равенство приобрело следующий вид:

$$a \cdot (uc_1) + b \cdot (vc_1) = c.$$

Осталось заметить, что числа uc_1 и vc_1 и есть решения нашего уравнения $ax + by = c$! Ведь при подстановке этих чисел в уравнение, мы получаем верное равенство — мы только что это доказали.

Пример. Найти решение уравнения $2016x + 1514y = 8$.

В предыдущем примере мы нашли линейное разложение НОД(2016,1514):

$$2016 \cdot (-190) + 1514 \cdot (253) = 2.$$

Умножим обе части равенства на 4:

$$2016 \cdot (-760) + 1514 \cdot (1012) = 8.$$

Получаем, что $(x, y) = (-760, 1012)$ — решение нашего уравнения.

Задача 3. Найти решение уравнения 1) $7x + 5y = -3$; 2) $97x - 20y = 2$.

4. Поиск всех решений уравнения $ax + by = c$.

В случае, если c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$, мы научились находить одно решение. Есть ли еще решения?

Пример. Посмотрим на уравнение $x + 2y = 1$. Видно, что решений в целых числах у него не одно: подходят пары $(-1, 1), (1; 0), (3, -1)$. И вообще, для любого нечетного x несложно найти подходящее y, чтобы уравнение было выполнено.

Это наталкивает на следующее рассуждение. Пусть (x_0, y_0) — решение, которое мы нашли, пользуясь линейным разложением $\text{НОД}(a, b)$. А (x_1, y_1) — любое другое решение. Тогда выполнено два равенства:

$$ax_0 + by_0 = c,$$
$$ax_1 + by_1 = c.$$

Вычтем второе равенство из первого, получим равенство:

$$a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0.$$

Это — уравнение с нулем в правой части, мы научились решать такие в пункте 1! Переносим одно слагаемое в правую часть:

$$a(x_0 - x_1) = -b(y_0 - y_1).$$

Если $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, то сократим это равенство на $d = \text{НОД}(a, b)$:

$$a_1(x_0 - x_1) = -b_1(y_0 - y_1).$$

Числа a_1 и b_1 взаимно просты, поэтому $y_0 - y_1$ делится на a_1. Иными словами, существует такое целое t, что $y_0 - y_1 = a_1 t$, т.е.

$$a_1(x_0 - x_1) = -b_1 a_1 t.$$

Получаем, что $x_0 - x_1 = -b_1 t$. Мы доказали, что если (x_1, y_1) — некоторое решение уравнения $ax+by = c$, то $x_1 = x_0+b_1 t$, $y_1 = y_0-a_1 t$ для некоторого целого числа t. Остается заметить, что все пары целых чисел вида $(x_0+b_1 t, y_0-a_1 t)$ являются решениями нашего уравнения. Действительно,

$$\begin{aligned} a(x_0 + b_1 t) + b(y_0 - a_1 t) &= \text{ (раскрываем скобки)} \\ = ax_0 + ab_1 t + by_0 - ba_1 t &= \text{ (подставляем } a = a_1 d,\ b = b_1 d) \\ = ax_0 + a_1 d b_1 t + by_0 - b_1 d a_1 t &= \text{ (сокращаем слагаемое } a_1 b_1 dt) \\ = ax_0 + by_0 = c. \end{aligned}$$

Пример. Найти все решения уравнения $2016x + 1514y = 8$.

Обозначим через (x_0, y_0) уже найденное нами решение $(-760, 1012)$.

$$2016x_0 + 1514y_0 = 8,$$

$$2016x_1 + 1514y_1 = 8.$$

Вычитаем одно из другого, переносим одно из слагаемых в правую часть.

$$2016(x_0 - x_1) + 1514(y_0 - y_1) = 0,$$

$$2016(x_0 - x_1) = -1514(y_0 - y_1).$$

Делим обе части последнего равенства на $2 = \text{НОД}(a, b)$.

$$1008(x_0 - x_1) = -757(y_0 - y_1).$$

Получаем, что $x_0 - x_1 = -757t$, $y_0 - y_1 = 1008t$. Откуда $x_1 = x_0 + 757t$, $y_1 = y_0 - 1008t$. Окончательно, решения уравнения имеют вид $(x, y) = (-760 + 757t, 1012 - 1008t)$.

Задача 4. Найти все решения уравнения 1) $7x + 5y = -3$; 2) $97x - 20y = 2$.

Задача 5. Найти все решения уравнения 1) $23x + 49y = 2$; 2) $48x + 57y = 19$.

5. Домашнее задание.

Задача 1. Найти все решения уравнения

(1) $889x + 140y = 21$
(2) $15x + 84y = 39$
(3) $625x + 135y = 5$.