Занятие 5. 10.02.16 Ещё немного про НОД.

Утверждение. НОД(a,b)=НОД$(a,b-a)$.

Теорема. Пусть a и b — целые числа, $ab \neq 0, d$=НОД(a,b). Тогда существуют целые числа u и v, такие, что $au+bv=d$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим наименьшее натуральное число m, являющееся линейной комбинацией чисел a и b (то есть представимое в виде $ax+by$). Разделим a на m с остатком: $a=qm+r$. Число $r=a-qm$ также является линейной комбинацией чисел a и b, но оно меньше m. Значит, $r=0$, то есть a кратно m. Аналогично b кратно m. Следовательно, и d делится на m, и поэтому является линейной комбинацией чисел a и b.

Следствие. Если числа a и b взаимно просты, то существуют целые числа u и v, такие, что $au+bv=1$.

1. Для самостоятельного решение.

Задача 1.1. Докажите, что

(1) НОД(a,b) = НОД$(a,b-ka)$ для любого натурального k;
(2) если мы поделили a на b с остатком, то из равенства $a=bq+r$ следует соотношение НОД(a,b) = НОД(b,r).

Задача 1.2. Найдите всевозможные значения
(1) НОД$(n,12)$; (2) НОД$(n,n+1)$; (3) НОД$(n,n+6)$; (4) НОД$(2n+3,7n+6)$.

Задача 1.3. Докажите, что НОД$(2^6-1,2^{15}-1)$=7.

Задача 1.4. Пусть $au+bv=1$, где a,b,u и v — некоторые целые числа. Докажите, что НОД(a,b)=1.

Задача 1.5. a,b,c — целые числа; a и b отличны от нуля, d = НОД(a,b).Докажите, что

(1) если уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах, то c делится на d;
(2) если c делится на d, то уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах.

Задача 1.6. Пусть натуральное число n таково, что НОД$(n,n+1)$ < НОД$(n,n+2)$ < ... < НОД$(n,n+35)$. Докажите, что НОД$(n,n+35)$ < НОД$(n,n+36)$.

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. В будущем решили, что имеющиеся денежные купюры неудобны. А поскольку у власти стояли далеко не только математики, то было решено ввести всего две купюры, достоинством 77 и 685 рублей. Докажите, что нам повезло и даже в таком случае мы сможем оплатить любую сумму, возможно, со сдачей.

Задача 2.2. Пусть $au+bv=2$. Верно ли, что НОД(a,b)=2?

Задача 2.3. Есть два бидона по m и n литров. Сколько литров можно отмерить с их помощью, если

(1) есть пустая большая бочка;
(2) большой бочки нет, есть только два бидона.