Занятие 6. 02.03.16 Алгоритм Евклида.

Утверждение. Если мы поделили a на b с остатком, то из равенства $a = bq + r$ следует соотношение НОД(a, b) = НОД(b, r).

Алгоритм Евклида — правило, которое позволяет по двум натуральным числам a и b найти НОД(a, b). Если имеются два натуральных числа $a > b > 0$, то сначала делим a на b, и получаем остаток r_1, который меньше, чем b:

$$a = b * q_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b, \ \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r_1).$$

Затем делим b на r_1, находим остаток r_2, который меньше, чем r_1:

$$b = r_1 * q_2 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1, \ \text{НОД}(b, r_1) = \text{НОД}(r_1, r_2).$$

Далее делим число r_1 на r_2, находим остаток r_3, меньший, чем r_2:

$$r_1 = r_2 * q_3 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2, \ \text{НОД}(r_1, r_2) = \text{НОД}(r_2, r_3).$$

Продолжаем этот процесс. Он обязательно закончится, поскольку каждый следующий остаток меньше предыдущего, а все остатки — неотрицательные числа. В конце концов какой-то остаток r_{n-1} разделится на остаток r_n нацело, без остатка:

$$r_{n-2} = r_{n-1} * q_n + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1}, \ \text{НОД}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_n),$$
$$r_{n-1} = r_n * q_{n+1}, \ \text{НОД}(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Последний остаток r_n и есть НОД(b, a), так как

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(b, a).$$

Например, НОД$(2016, 1514) = 2$, так как

$$\begin{gathered} 2016 = 1514 * 1 + 502, \\ 1514 = 502 * 3 + 8, \\ 502 = 8 * 62 + 6, \\ 8 = 6 * 1 + 2, \\ 6 = 2 * 3. \end{gathered}$$

1. Для самостоятельного решения.

Задача 1.1. Найдите НОД (39, 102); (126, 1308).

Задача 1.2. Найдите НОД(111...111, 11...11), где а) в записи 1-ого числа 5 единиц, в записи 2-ого — 10; б) в записи 1-ого числа 10 единиц, в записи 2-ого — 15; в) в записи 1-ого числа 100 единиц, в записи 2-ого — 60.

Задача 1.3. Докажите, что дроби (1) $\frac{2n+13}{n+7}$; (2) $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократимы при всех натуральных n.

Задача 1.4. Докажите, что НОД$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$, где d=НОД(m, n).

Задача 1.5. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

Задача 1.6. Докажите, что число $2^{16} + 1$ взаимно просто с каждым из чисел $2 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1$.

Задача 1.7. Докажите, что в последовательности $2 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1$ любые два числа взаимно просты.

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. Найдите НОД(322, 56); (478717, 24139).

Задача 2.2. Докажите, что дробь $\frac{2n^2-1}{n+1}$ несократима при всех натуральных n.

Задача 2.3. Докажите, НОД двух чисел, первое из которых записано n единицами, а второе записано m единицами, равно числу, записанному d единицами, где d = НОД(m, n).

Задача 2.4. Числа x^{2016} и x^{23} — рациональны. Докажите, что число x тоже рационально.