Занятие 3. 27.01.16 Основная теорема арифметики.

Определение. Натуральное число a называется *простым*, если оно имеет ровно два различных натуральных делителя (1 и a) и *составным* - если больше двух..

Каноническое разложение. Для любого натурального числа n найдутся такие различные простые $p_1, \dots p_m$ и натуральные $\alpha_1, \dots \alpha_m$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots p_m^{\alpha_m}$.

Основная теорема арифметики. Разложение натурального числа в произведение простых единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Пример. Найти каноническое разложение чисел (1) 2015; (2) 14!.

1. Для самостоятельного решения.

Задача 1.1. Верно ли, что

(1) если натуральное число делится на 3 и на 4, то оно делится и на 12?
(2) если натуральное число делится на 4 и 6, то оно делится и на 24?
(3) если натуральное число делится на 3, то его квадрат делится на 9?
(4) если куб числа делится на 5, то он же делится и на 25?

Задача 1.2. Про некоторое натуральное число сделано четыре утверждения: оно делится на 2; делится на 6; делится на 12; делится на 48. Известно, что два из этих утверждений верны, а два нет. Какие утверждения являются ложными?

Задача 1.3. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого 300! не делится на 34^n.

Задача 1.4. Найдите количество делителей натурального числа n, если
(1) $n = p^\alpha$; (2) $n = p^\alpha q^\beta$; (3) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$.

Задача 1.5. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

Задача 1.6. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

Задача 1.7. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найти эти числа.

Задача 2.2. Докажите, что число 100! не является полным квадратом.

Задача 2.3. Некоторое натуральное число n имеет два простых делителя. Его квадрат имеет 15 делителей. Сколько делителей имеет куб этого числа?

Задача 2.4. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?