

Занятие 2. 16.09.15 Признаки делимости.

НА 3. Число имеет такой же остаток при делении на 3, как и его сумма цифр. В частности, число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

НА 4. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, делящееся на 4.

НА 9. Число имеет такой же остаток при делении на 9, как и его сумма цифр. В частности, число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

НА 11. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, занимающих нечётные позиции, и суммой цифр, занимающих чётные позиции, делится на 11.

1. Для самостоятельного решения.

Задача 1.1. Илья хочет поиграть на компьютере, но пароля он не знает. Мама рассказала Илье, что пароль состоит из 7 цифр — двоек и троек, причем двоек больше, чем троек. А папа — что пароль делится и на 3, и на 4. Сможет ли Илья с первой попытки ввести правильный пароль?

Задача 1.2. Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нем цифры. Можно ли превратить число 1 в 846 с помощью таких операций?

Задача 1.3. Доказать, что $\overline{abcd} : 11$ тогда и только тогда, когда $\overline{ab} + \overline{cd} : 11$.

Задача 1.4. Может ли число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть точным квадратом?

Задача 1.5. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

Задача 1.6. У числа $2015!$ нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

Задача 1.7. Доказать, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

Задача 1.8. Квадрат целого числа имеет вид $\dots 09$ (оканчивается цифрами 0 и 9). Докажите, что третья справа цифра — чётная.

2. Домашнее задание.

Задача 2.1. Найдите наименьшее число, кратное 45, десятичная запись которого состоит только из единиц и нулей.

Задача 2.2. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечетна.

Задача 2.3. Какую минимальную сумму цифр может иметь натуральное число, делящееся на 99?

Задача 2.4. Рассмотрим суммы цифр всех чисел от 1 до 1 000 000 включительно. У полученных чисел вновь рассмотрим сумму цифр и так далее, пока не получим миллион однозначных чисел. Каких чисел больше среди них — единиц или двоек?