Занятие 1. 13.01.16 Делимость целых чисел. Деление с остатком.

Целое число a *делится* на не равное нулю целое число b, если существует такое число q, что $a = bq$. В таком случае число a называется *делимым*, b — *делителем*, а q — *частным*.

Запись $a \vdots b$ обозначает, что число a *делится на* b. Также используется запись $b \mid a$, означающая, что b *является делителем* числа a.

Свойство 1. Если $a \vdots b$, то для любого целого $k \neq 0$ выполнено $ka \vdots kb$.

Свойство 2. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$ и $(a - b) \vdots c$.

Свойство 3. Если $b \vdots c$, $a \vdots b$, то $a \vdots c$.

Свойство 4. Если $a \vdots b$, то для любого целого c выполнено $ac \vdots b$.

Свойство 5. Если $a_1 \vdots b_1$ и $a_2 \vdots b_2$, то $a_1 a_2 \vdots b_1 b_2$.

Задача 1. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

(1) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;
(2) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;
(3) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них не делится на 6.

Задача 2. Доказать, что при любом натуральном n число $n^2 + 6n + 12$ не делится на $n + 3$.

Задача 3. Докажите, что если $9 + a$ и $43 - b$ делятся на 17, то $a + b$ делится на 17.

Задача 4. Докажите, что если $a^2 \vdots (a + b)$, то $b^2 \vdots (a + b)$.

Если a и b — целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q, что $a = bq + r$, где «остаток» r — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r < b$. Эти числа q r определяются по данным a и b единственным образом. Если $r = 0$, мы получаем случай, когда a делится на b нацело.

Например, 150=7*21+3, т.е. 3 — остаток при делении 150 на 7.

Пример. Для ремонта квартиры требуется 69 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

Задача 5. В ресторане на каждого посетителя полагается 230 гр десерта. На банкет собираются прийти 9 человек. Торт какого наименьшего веса нужно заказать, чтобы каждый гость смог полакомиться кусочком и взять добавку? Торт может весить только целое число килограмм.

Задача 6. В одном из подъездов 7 этажного дома на 1-ом этаже находятся квартиры с №127 по №132. На каком этаже и в каком подъезде находится квартира 289?

Задача 7. В группе учатся 16 студентов. У каждого студента есть три шпаргалки — одна по математике, одна по философии, одна по английскому. Могут ли студенты поменяться шпаргалками друг с другом так, чтобы у каждого студента оказались шпаргалки по какому-то одному предмету?

Задача 8. Оля пожарила на завтрак сырники. Если каждый член семьи съест по 2, 3 или 4 сырника, то всегда будет оставаться один лишний сырник, а если по 5, то лишних сырников не останется. Какое наименьшее число сырников могла пожарить Оля?