Занятие 5. 14.10.15 Ещё немного про НОД.

Задача 0.1. Докажите, что НОД(a, b)=НОД$(a, b-a)$.

1. Первая часть задач.

Задача 1.1. Докажите, что НОД(a, b)=НОД$(a, b-ka)$ для любого натурального k.

Задача 1.2. Пусть мы поделили a на b с остатком. Докажите, что из равенства $a = bq + r$ следует соотношение $(a, b) = (b, r)$.

Задача 1.3. Найдите всевозможные значения
(1) НОД$(n, 12)$; (2) НОД$(n, n+6)$.

Задача 1.4. Докажите, что НОД$(2^6 - 1, 2^{15} - 1)$=7.

2. Продолжение.

Теорема.Пусть a и b – целые числа, $ab \neq 0, d$=НОД(a, b). Тогда существуют целые числа u и v, такие, что $au + bv = d$.

Задача 2.1. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров влево, либо на 21 сантиметр вправо. В каких точках прямой она может побывать?

Следствие.Если числа a и b взаимно просты, то существуют целые числа u и v, такие, что $au + bv = 1$.

Задача 2.2. Пусть $au + bv = 2$. Верно ли, что НОД(a, b)=2?

Задача 2.3. Есть два бидона по m и n литров. Сколько литров можно отмерить с их помощью, если

(1) есть пустая большая бочка;
(2) большой бочки нет, есть только два бидона.

3. Домашнее задание.

Задача 3.1. Найдите всевозможные значения
(1) НОД$(n, n+1)$; (2) НОД$(2n+3, 7n+6)$.

Задача 3.2. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася — всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

Задача 3.3. В будущем решили, что имеющиеся денежные купюры неудобны. А поскольку у власти стояли далеко не только математики, то было решено ввести всего две купюры, достоинством 77 и 685 рублей. Докажите, что нам повезло и даже в таком случае мы сможем оплатить любую сумму, возможно, со сдачей.

Задача 3.4. Пусть $au + bv = 1$, где a, b, u и v – некоторые целые числа. Докажите, что НОД(a, b)=1.