

## Занятие 4. 30.09.15 НОД и НОК.

Пусть  $a$  и  $b$  — два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и  $a$  и  $b$  одновременно, т.е. все общие делители  $a$  и  $b$ . Выберем из них наибольший и назовем его *наибольшим общим делителем*. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  через  $\text{НОД}(a, b)$  или, для краткости,  $(a, b)$ . Наименьшим общим кратным чисел  $a$  и  $b$  ( $\text{НОК}(a, b)$ ) или, для краткости,  $[a, b]$  называется наименьшее натуральное число, которое делится на  $a$  и  $b$ .

1. Найдите  $\text{НОД}(441, 686)$ ,  $\text{НОК}(441, 686)$ .

2. Пользуясь ОТА, выпишите общий вид  $\text{НОД}$  и  $\text{НОК}$  двух целых чисел.

3. Любое общее кратное чисел  $a$  и  $b$  делится на  $\text{НОК}(a, b)$ .

4. Любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$  является делителем  $\text{НОД}(a, b)$ .

**Определение.** Если  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то числа  $a$  и  $b$  называются взаимно простыми.

**Утверждение.** Если  $a$  и  $b$  — взаимно просты, то  $\text{НОК}(a, b) = ab$ .

5. Выберите из набора чисел все возможные пары взаимно простых чисел: 14, 21, 35, 45, 78, 99.

### 1. Для самостоятельного решения

**Задача 1.1.** Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

**Задача 1.2.** Верно ли, что, если  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = d$ , то и  $\text{НОД}(a, c) = d$ ?

**Задача 1.3.** Докажите, что для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$  справедливо равенство  $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$ .

**Задача 1.4.** Докажите, что если  $\text{НОД}(a, b) = d$  и  $a = a_1d, b = b_1d$ , то числа  $a_1, b_1$  взаимно простые.

**Задача 1.5.** Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - a)$ .

**Задача 1.6.** Найдите всевозможные значения

(1)  $\text{НОД}(n, 12)$ ; (2)  $\text{НОД}(n, n + 1)$ ; (3)  $\text{НОД}(n, n + 6)$ ; (4)  $\text{НОД}(2n + 3, 7n + 6)$ .

**Задача 1.7.** Найдите  $\text{НОД}$  всех чисел, в записи которых все цифры от 1 до 9 использованы по одному разу.

### 2. Домашнее задание.

**Задача 2.1.** С открытия летнего спортивного сезона четыре легкоатлета начали посещать тренировки. Первый приходил на стадион каждый третий день, второй — каждый пятый, третий — каждый восьмой и четвертый — каждые две недели. Через сколько дней легкоатлеты встретятся вместе на стадионе второй раз?

**Задача 2.2.** Может ли так быть, что  $\text{НОК}(a, b) = a + b$ ?

**Задача 2.3.** Пусть числа  $a$  и  $b$  — взаимно простые. Докажите, что если  $c \vdots a$  и  $c \vdots b$ , то  $c \vdots ab$ .

**Задача 2.4.** При каких натуральных  $n$  число  $\frac{2n+18}{n+3}$  является целым?