

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

и не только...

Для любых вещественных a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Как доказать? — 1: Достаточно рассмотреть квадратный трехчлен относительно x

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2.$$

Он, очевидно, всегда неотрицателен, а значит его дискриминант неположителен, что и будет являться неравенством КБШ.

Как доказать? — 2: Можно заметить тождество Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

Задачи

1. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2.$$

2. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k b_k} \right) \geq 4n^2.$$

3. Для положительных a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

4. Для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) \cdot (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

5. Докажите неравенство

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) + \cos(\beta) \leq 2.$$

6. Даны положительные числа a, b, c . Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Докажите неравенство для чисел x, y, z из отрезка $[0; 1]$:

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leq 3.$$

8. Докажите неравенство $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$, если $a > 0, b > 0$ и $a^2 + b^2 > a + b$.

9. При положительных a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

10. При положительных a, b, c, d докажите неравенства:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

11. Сумма положительных a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$