Алгебраические преобразования

1. Для некоторых натуральных чисел a, b, c, d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}\,.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

2. Докажите тождество

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} =$$
$$= \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}\,.$$

3. Рациональные числа a и b удовлетворяют соотношению

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0\,.$$

Докажите, что $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

4. Существует ли такое действительное α, что $\cos(\alpha)$ иррационально, а числа $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, $\cos(4\alpha)$ и $\cos(5\alpha)$ рациональны?

5. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$ и $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

6. Числа x, y, z таковы, что $x + yz$, $y + xz$, $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 рационально.

7. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых различных натуральных a, b, c и d среди чисел

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)},\ \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)},\ \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)},\ \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

есть по крайней мере два числа, равных n.

8. Число N, не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, не делящихся на 3.