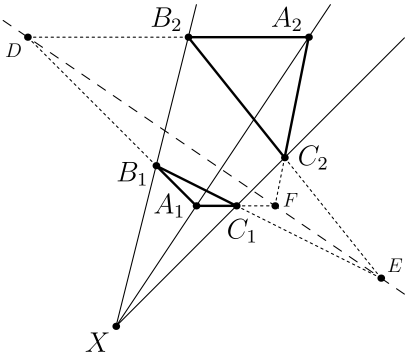
Выход в пространство



1. *Теорема Дезарга.* Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой.

Решение. Заметим на рисунке пространственную фигуру. Рассмотрим трёхгранный угол с вершиной в точке X, который проецируется в точности в наш рисунок (можно например, оставив на месте точку X, приподнять луч XA_1 вместе с точками A_1 и A_2, тогда точки D, E и F, определяемые как пересечения соответствующих условию прямых, тоже отойдут от плоскости так, что их проекциями будут точки D, E, F на плоскости рисунка). Осталось заметить, что точки D, E и F принадлежат одновременно плоскостям $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересечением которых является прямая (совпадать плоскости не могут, если $XA_1B_1C_1$ — трехгранный угол), т. е. точки D, E и F лежат на одной прямой в пространстве, а значит и лежат на одной прямой после проекции.

2. На плоскости даны три параллельные прямые a, b, c и три точки A, B, C, лежащие между прямыми b и c, a и c, a и b соответственно. Существует ли треугольник такой, что его вершины лежат на прямых a, b и c, а стороны содержат точки A, B, C (на каждой из прямых a, b, c должно быть не более одной вершины треугольника, и на каждой стороне не более одной точки A, B, C).

3. *Теорема Брианшона.* Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

(a) Пусть $ABCDEF$ — данный описанный шестиугольник. Докажите, что существует пространственный шестиугольник, проходящий через точки касания $ABCDEF$ с его вписанной окружностью, проекцией которого на плоскость ABC будет шестиугольник $ABCDEF$ (пространственным многоугольником назовём замкнутую несамопересекающуюся ломаную в пространстве. В задаче требуется найти пространственный шестиугольник, не лежащий в одной плоскости).

(b) Докажите теорему Брианшона.

4. *Теорема о трёх колпаках.* На плоскости даны три непересекающиеся окружности. Рассмотрим три точки пересечения общих внешних касательных к каким-то двум из данных окружностей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

5. На плоскости даны четыре прямые общего положения. По каждой прямой с постоянной скоростью идёт пешеход. Известно, что первый встречается со вторым, с третьим и с четвёртым, а второй встречается с третьим и с четвёртым. Доказать, что третий пешеход встретится с четвёртым.

6. Через центр правильного треугольника ABC провели произвольную прямую l, пересекающую стороны AB и BC в точках D и E. Построили точку F такую, что $AE = FE$ и $CD = FD$. Докажите, что расстояние от точки F до прямой l не зависит от выбора этой прямой.

7. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности.